

Координатно-векторный метод решения задач по стереометрии

Урок в 11 классе

Куляпина Л.Ф
МАОУ «Лицей №5»

Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками A и B можно вычислить:

1) как длину отрезка AB , если отрезок AB удастся включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;

2) по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

где $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$;

3) по формуле $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$, или

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, где $\{a, b, c\}$ – координаты вектора \overrightarrow{AB} .

Пример 2. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E и K – середины ребер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали $B_1 D_1$ так, что $B_1 M = 2 M D_1$. Найти расстояние между точками Q и L , где Q – середина отрезка EM , а L – точка отрезка MK такая, что $ML = 2LK$.

Расстояние от точки до прямой

- *Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.*
- *Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.*
- *Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.*

познано-вычислительный метод

Расстояние от точки до прямой можно вычислить, как длину отрезка перпендикуляра, если удастся включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот.

Расстояние от точки до плоскости

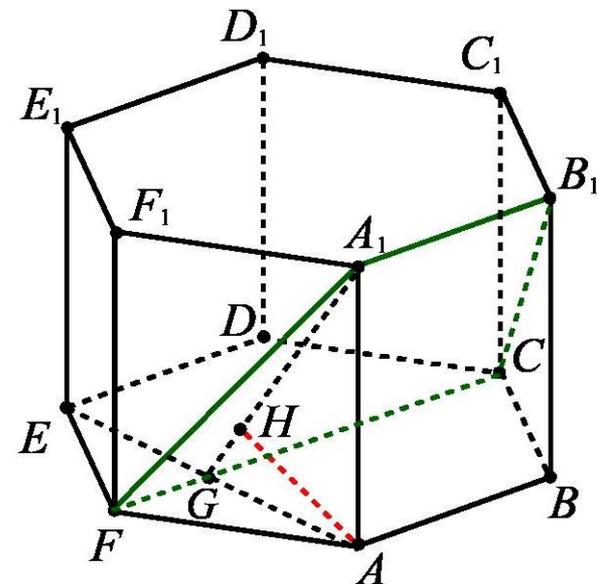
координатный метод

Расстояние от точки M до плоскости α можно вычислить по формуле

$$\rho(M, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

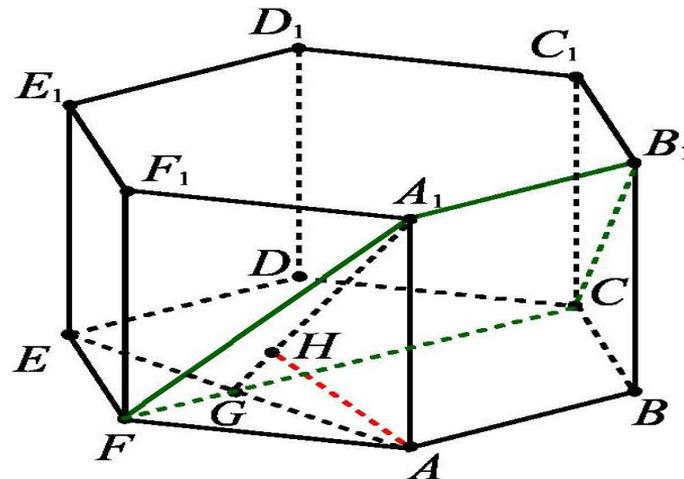
где $M(x_0, y_0, z_0)$, плоскость α задана уравнением $ax + by + cz + d = 0$.

- *Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.*
- *Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно длине их общего перпендикуляра.*
- *Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.*
- *Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине их общего перпендикуляра.*
- *Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно расстоянию между точкой одной из этих плоскостей и другой плоскостью.*



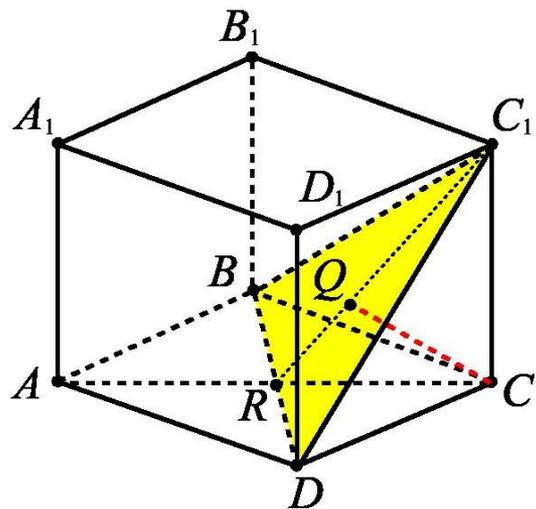
Расстояние от точки до плоскости

Пример 12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, ребра которой равны l , найти расстояние от точки A до плоскости $A_1 B_1 C$.



Расстояние от точки до плоскости

Пример 16. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно a . Найти расстояние от точки C до плоскости BDC_1 .



метод объемов

Если объем пирамиды $ABCM$ равен V_{ABCM} , то расстояние от точки M до плоскости α , содержащей треугольник ABC , вычисляют по формуле

$$\rho(M, \alpha) = \rho(M, ABC) = \frac{3V_{ABCM}}{S_{ABC}}.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми

- Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

поэтапно-вычислительный метод

Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми можно воспользоваться одним из приведенных ниже четырех способов.

1. Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный обеим) и найти его длину.

2. Построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.

3. Заключить данные прямые в параллельные плоскости, проходящие через данные скрещивающиеся прямые, и найти расстояние между этими плоскостями.

4. Построить плоскость, перпендикулярную одной из данных прямых, и построить на этой плоскости ортогональную проекцию второй прямой (см. рис. 17).

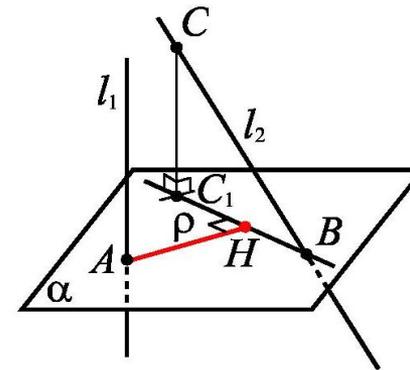


Рис. 17

$$\rho(l_1, l_2) = \rho(A, BC_1) = AH,$$

где $A = l_1 \cap \alpha$, $\alpha \perp l_1$, BC_1 – ортогональная проекция l_2 на плоскость α , H – основание перпендикуляра, опущенного из A на BC_1 .

Угол между двумя прямыми

- Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.
- $0^\circ < \angle(a, b) \leq 90^\circ$.
- Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.
- Две прямые называются *перпендикулярными*, если угол между ними равен 90° .
- Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

поэтапно-вычислительный метод

При нахождении угла φ между прямыми m и l используют формулу

$$\cos \varphi = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{2bc},$$

где a и b – длины сторон треугольника ABC , соответственно параллельных этим прямым.

Угол между двумя прямыми

векторно-координатный метод

При нахождении угла φ между прямыми m и l используют формулу

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}$$

или в координатной форме:

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\vec{p} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{q} = \{x_2, y_2, z_2\}$ – векторы, соответственно параллельные этим

К)
М) прямым;

Угол между прямой и плоскостью

- Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.
- $0^\circ < \angle(a, \alpha) < 90^\circ$.
- Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90° .
- Если прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным 0° .

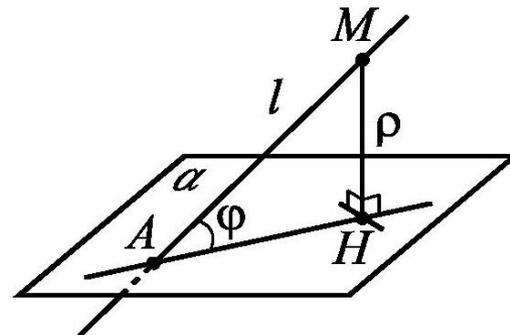
позитивно-вычислительный метод

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить, если этот угол удастся включить в прямоугольный треугольник в качестве одного из острых углов.

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить по формуле

$$\sin \varphi = \sin \angle(l, \alpha) = \frac{\rho(M, \alpha)}{AM},$$

где $M \in l$, $l \cap \alpha = A$ (см. рис. 45).



векторно-координатный метод

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить по формуле

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|}$$

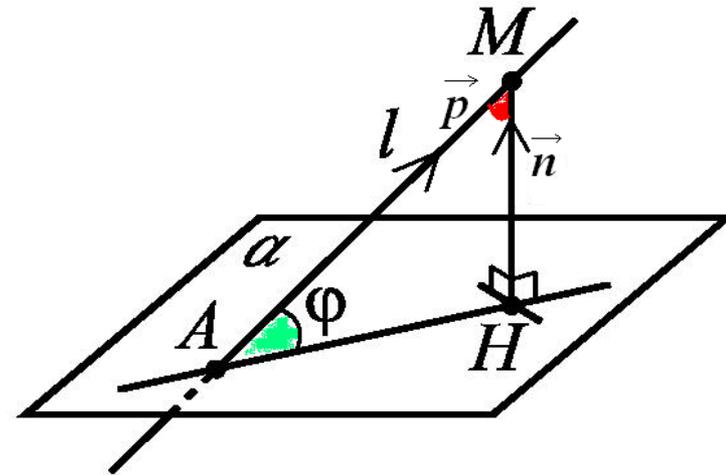
или в координатной форме

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где $\vec{n} = \{x_1, y_1, z_1\}$ – вектор нормали плоскости α , $\vec{p} = \{x_2, y_2, z_2\}$ – направляющий вектор прямой l ;

• прямая l и плоскость α параллельны тогда и только тогда, когда

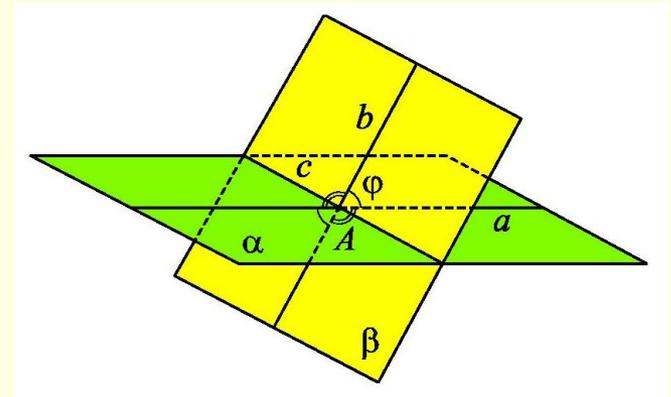
$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$



Угол между плоскостями

1.7. Угол между плоскостями

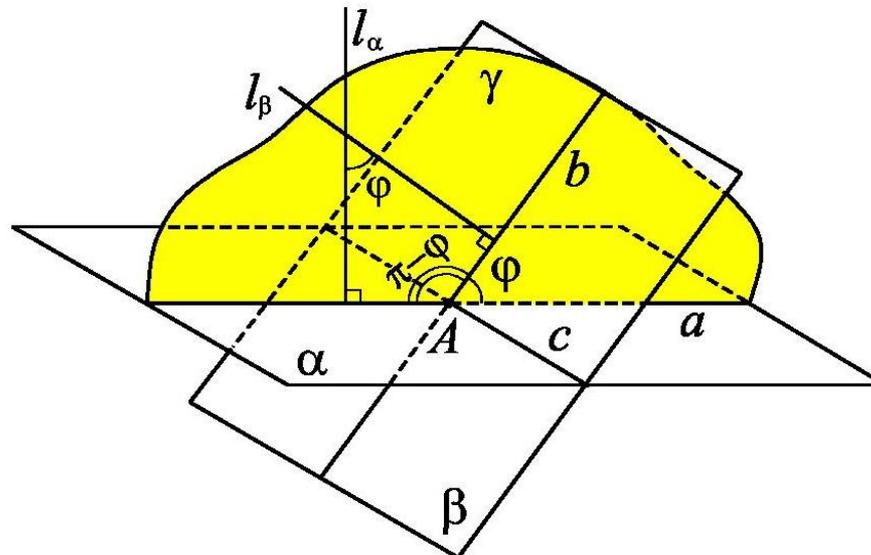
- Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.
- Величина двугранного угла принадлежит промежутку $(0^\circ, 180^\circ)$.
- Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку $(0^\circ, 90^\circ]$.
- Угол между двумя параллельными плоскостями считается равным 0° .



- использование перпендикуляров
к плоскостям

прямые l_α и l_β лежат в

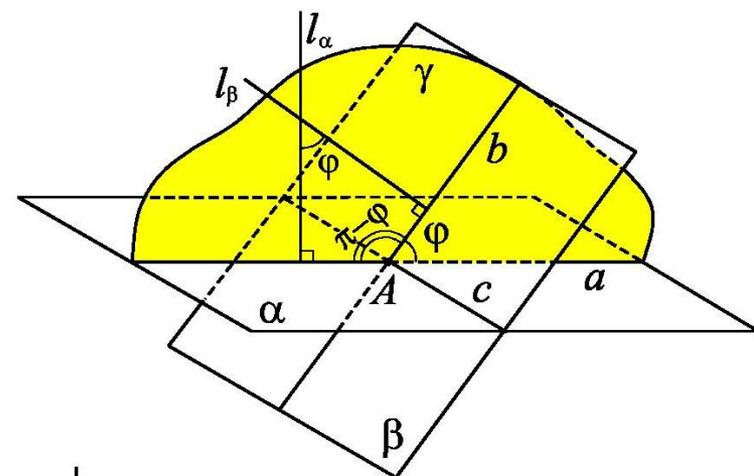
плоскости γ и перпендикулярны плоскостям α и β соответственно. Тогда угол между ними равен углу между плоскостями α и β . В общем случае прямые l_α и l_β могут быть скрещивающимися.



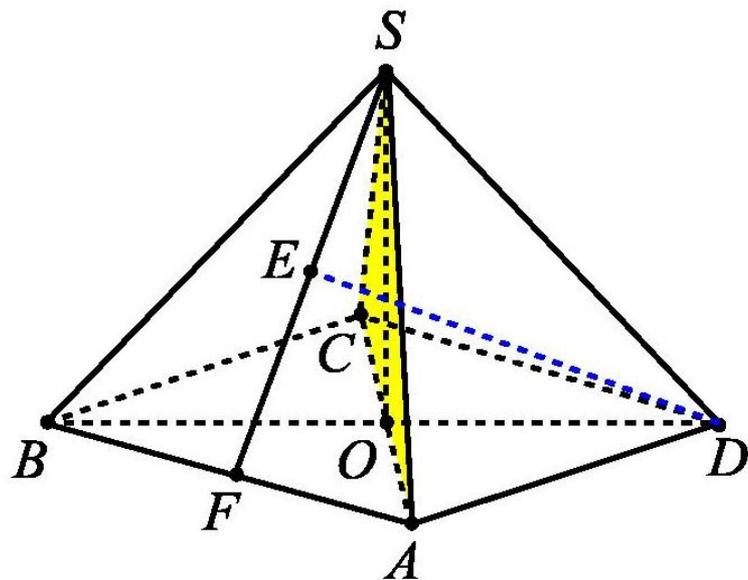
Нахождение угла между плоскостями, заданными уравнениями

Задачу о нахождении угла между плоскостями α и β , заданными уравнениями $p_1x + q_1y + r_1z + d_1 = 0$ и $p_2x + q_2y + r_2z + d_2 = 0$ соответственно, удобнее свести к задаче о нахождении угла между векторами их нормалей $\vec{n}_\alpha = \{p_1, q_1, r_1\}$ и $\vec{n}_\beta = \{p_2, q_2, r_2\}$, используя формулу

$$\cos \angle(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2|}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2} \cdot \sqrt{p_2^2 + q_2^2 + r_2^2}}.$$



Пример 42. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найти угол между прямой DE , где E – середина апофемы SF грани ASB , и плоскостью ASC .



Пример 56. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найти угол между плоскостями $AD_1 E$ и $D_1 F C$, где точки E и F – середины ребер $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ соответственно.

